

Colles de Maths - semaine 5

Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

- Équations différentielles linéaires du premier ordre (avec et sans second membre)
- Équations différentielles linéaires homogènes du 2^e ordre à coefficients constants (cas complexe et réel)

Calculs d'intégrales rapides

Exercice 1 Calculer $\int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

Exercice 2 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin^3 x dx$.

Exercice 3 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Donner une relation de récurrence sur I_n .
2. En déduire la minoration $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq \frac{e}{n+2}$.

Exercice 4 Donner une primitive de la fonction arctan sur \mathbb{R} .

Équations différentielles

Exercice 5 Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 4y = x \cos(2x)$.

Exercice 6 Résoudre l'équation $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ en se ramenant à une équation de degré 2.

Exercice 7 Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toutes les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ soient bornées sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 8 Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R}_+^* vérifiant

$$\forall x > 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 9 Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x.$$

Exercice 10 Déterminer les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $x \mapsto f(x) - \int_0^x t f(t) dt$ est constante.

Exercice 11 Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x).$$